ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΑΞΗ Β'
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΩΡΙΑ

Να χαρακτηρισθούν με το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) οι παρακάτω προτάσεις:

1. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών
2. Αν το πολυώνυμο P(x) εχει ρίζα το ρ τότε έχει παράγοντα το x-ρ
3. Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα
4. Ισχύει $\ln 2+\ln 3=\ln 5$
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=e^x$ τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Α(0,1)
6. Η συνάρτηση f(x)= ημx είναι γνησίως αύξουσα στο R
7. Οι λύσεις της εξίσωσης εφx = εφθ είναι x=2κπ+θ με κ στο Z
8. Έστω x_1, x_2 ∈R και 0 < α < 1. Αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$
9. Ο αριθμός lnx είναι πάντα θετικός.
10. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ημΑ = ημ(Β+Γ)
11. Η συνάρτηση f (x) = συνx είναι άρτια.
12. Για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με 0 < α < 1 ισχύει: $f(2)>f\left(\frac{1}{3}\right)$.
13. Ισχύει ότι $\eta\mu(-x)+\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in$R.
14. Αν για κάποια γωνία ω ισχύει: $\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega<0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 2ο ή στο 4ο τεταρτημόριο.
15. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ν - οστού βαθμού και το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι μ - οστού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$ είναι $\nu\cdot\mu$ βαθμού.
16. Αν $\alpha<0$, τότε $e^{\alpha}<0$.
17. Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0
18. Η συνάρτηση y= εφx έχει περίοδο π
19. Η συνάρτηση y=$\frac{1}{2^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα
20. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με f(x)= lnx τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Α(0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

α) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$ (μ. 12)

β) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>0$ (μ. 13)

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με f(x) = 1-2συν2x

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K = f($\frac{\pi}{2}$) - f($\frac{\pi}{4}$) (μ. 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0 (μ. 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f\left(x\right)=\ln\left(2-e^x\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (μ. 7)

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2x$ (μ.10)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{f(x)}>2-e^{2x}$ (μ. 8)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(συν^2ω)x^2+(2-ημ^2ω)x-2ημ^2ω$.

α) Να δείξετε ότι το P(x) έχει παράγοντα το $x-ημ^2ω$ (μ. 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(0)=-ημ^2ω-4ημω+3$ (μ. 15)

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. (μ. 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(μ. 6)

ii. αν $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)\left(2x-3\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (μ. 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. (μ. 6)

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1+\ln x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μ. 5)

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1+\ln^2 x$ (μ. 10)

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)>e^{2x-7}+x-1$ (μ. 10)

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+x^3+\alpha x^2-x+\beta,\ \alpha,\beta\in\Re$.

α. Αν το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το 1 είναι ρίζα του, να βρεθούν τα α και β. *(μ. 8)*

β. Για $\alpha=-3$ και $\beta=2$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. *(μ. 8)*

γ. Για $\alpha=-3$ και $\beta=2$, να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x-1}\le 0$. *(μ. 9)*

ΘΕΜΑ 8ο

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2}<\text{x}<2\pi$ και οι παραστάσεις:

$\text{A}=\eta\mu^2(\pi-\text{x})+\eta\mu^2(\pi+\text{x})+\sigma\upsilon\nu^2(-\text{x})$,

$\text{B}=\frac{\eta\mu\text{x}}{1+\sigma\upsilon\nu\text{x}}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\text{x}}{\eta\mu\text{x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\text{A}=\eta\mu^2\text{x}+1$. *(μ. 8)*

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Β. *(μ. 8)*

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις Α και Β να είναι ίσες. *(μ. 9)*

ΘΕΜΑ 9ο

α) Αν για την γωνία x ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2x-7\eta\mu x-5=0$ να βρείτε το $\eta\mu x$ (μ.10)

β) Αν $\eta\mu x=-\frac{1}{3}$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να απλοποιήσετε την

παράσταση $\text{K}=\sigma\upsilon\nu(5\pi+x)+3\eta\mu(\frac{9\pi}{2}-x)+\sigma\upsilon\nu(12\pi-x)$

και να υπολογίσετε την τιμή της (μ.15)

ΘΕΜΑ 10ο

Αν το πολυώνυμο $\text{P}(x)=2x^3-(\alpha+2)x^2-(\beta+3)x+4$ έχει ρίζα τον αριθμό -1

και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι ίσο με -18

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=5$ και $\beta=2$ (μ.9)

β) Να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της εξίσωσης $\text{P}(x)=0$ (μ.8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2^{3x+1}-7\cdot 4^x-3\cdot 2^x=2^{x+1}-4$ (μ.8)

ΘΕΜΑ 11ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (μ.7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1+\ln(e-1)$ (μ.8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le\ln 2$ (μ.10)

ΘΕΜΑ 12ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=αx^3 + (β-1)x^2 – 3x – 2β + 6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2, να βρείτε τα α και β. (μ. 9)

β) Για α=2 και β=4 να λύσετε

I. την εξίσωση $P(x)=0$ (μ. 9)

II. την ανίσωση $P(x)>0$ (μ. 7)

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (μ. 5)

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$. (μ. 10)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$. (μ. 10)

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = 2\ln x + \dfrac{1}{\ln x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g (μ. 6)

β) Υπολογίσετε το $\mu = g(e) + g(\sqrt{e})$ (μ. 6)

γ) Αν Α το πεδίο ορισμού της g, δείξτε ότι $g\left(\dfrac{1}{x}\right) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. (μ. 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) - g\left(\dfrac{1}{x}\right) = 6$ (μ. 7)